

Deformation af stålbjælker

Af Jimmy Lauridsen

Indhold

1	Nedbøjning af bjælker	1
1.1	Elasticitetsmodulet	2
1.2	Inertimomentet	4
2	Formelsamling for typiske systemer.....	8

1 Nedbøjning af bjælker

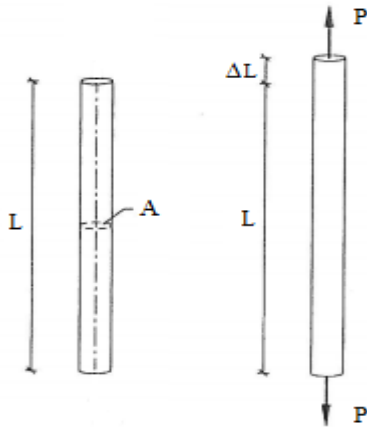
En bjælkes nedbøjning bestemmes ud fra bjælkens differentialeligning:

$$\frac{d^2}{dx^2} u(x) = \frac{-M(x)}{E \cdot I} \quad \rightarrow \quad u(x) = \iint \frac{-M(x)}{E \cdot I} dx$$

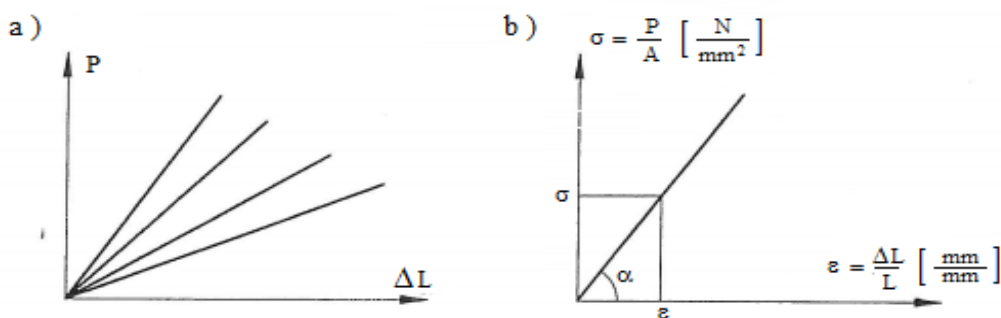
$M(x)$ beskriver de påvirkende laster og $(E \cdot I)$ beskriver bjælkens stivhed. Set fra et fysisk synspunkt virker det også meget naturligt, at en bjælkes nedbøjning bestemmes ud fra forholdet mellem lastens størrelse, og hvor stiv bjælken er. Bjælkestivheden er som det ses et produkt af *elasticitetsmodulet* (materialebestemt) og *inertimomentet* (tværsnitsbestemt). Disse to grundlæggende begreber er afgørende for nedbøjningen, og vil derfor blive gennemgået i de efterfølgende to afsnit.

1.1 Elasticitetsmodulet

Til at beskrive elasticitetsmodulet anvendes begreberne ”spænding” og ”tøjning”. Disse begreber kan anskueliggøres ved at kigge på en stang med et tværsnitsareal A og en længde L påvirket af rent træk med kraften P .



Figur 1



Figur 2

Hvis kraften vi trækker i stangen med gradvis vokser fra 0 til P , vil der tilsvarende gradvis ske en forlængelse ΔL af stangen, hvilket kan optegnes i et diagram. For samme materiale, men med forskellig geometri (A og L), fås forskellige kurver som vist på figur 2a. Ved at dividere med henholdsvis tværsnitsareal A og begyndelseslængden L (P/A og $\Delta L/L$) får vi den generelle arbejdskurve, som kun er materialeafhængig, og derfor er mere praktisk anvendelig. Se figur 2b.

$$\sigma = P/A = \text{spænding} \quad [\text{kraft pr. arealenhed, } N/mm^2 = \text{MPa}]$$

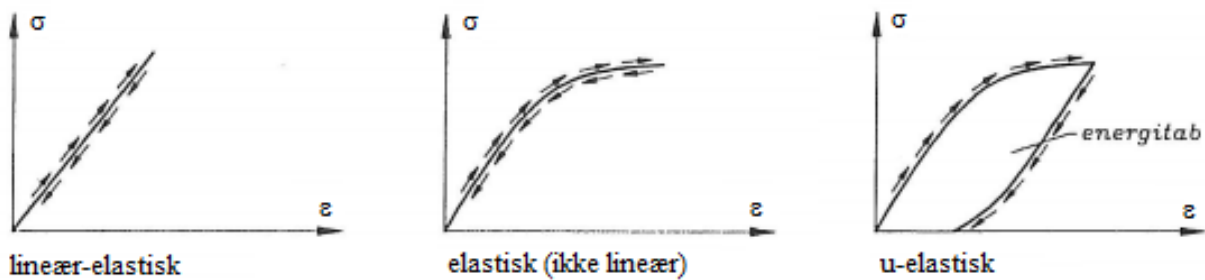
$$\varepsilon = \Delta L/L = \text{tøjning} \quad [\text{længdeændring pr. længdeenhed}]$$

Er arbejdskurven som vist en ret linje, og følger kurven samme linje tilbage, når kraften igen aftager fra P til 0, kaldes arbejdskurven for *lineær-elastisk*.

For lineær-elastiske materialer gælder, at arbejdskurvens hældningskoefficient (elasticitetsmodulet) kan findes ved hjælp af *Hookes lov*:

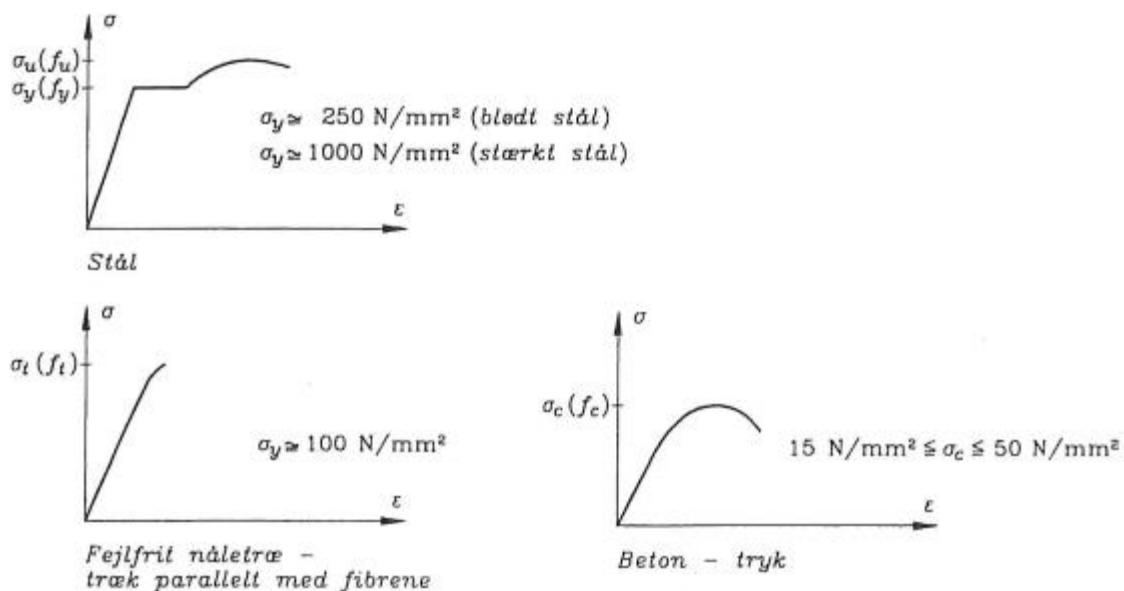
$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \rightarrow \quad E = \sigma/\varepsilon = \tan(\alpha) = \text{elasticitetsmodulet} \quad [N/mm^2 = \text{MPa}]$$

Ikke alle materialer er lineær-elastiske. Figur 3 viser de måder et materiale kan opføre sig på. De viste pile på kurverne angiver hhv. belastning og aflastning.



Figur 3

På figur 4 er vist tre eksempler på forskellige materialer og deres arbejdskurver



Figur 4

Opgave 1

Der trækkes i en rund stang af et lineær-elastisk materiale. Stangen har en diameter på 10 mm og en længde på 1 m. Ved kraften 500 kN måles der en forlængelse på 30 mm. Bestem Elasticitetsmodulet.

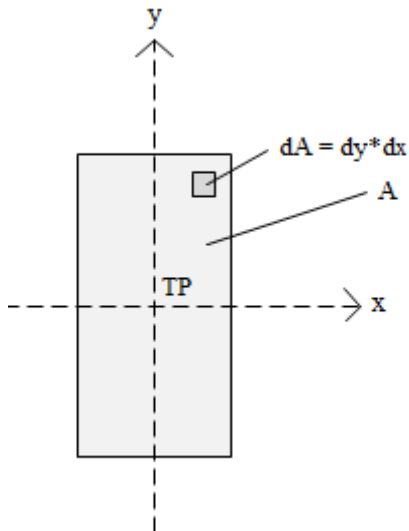
Løsning:

$$E = 0,21 \cdot 10^6 \text{ MPa} \quad \left(\text{MPa} = \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 1000 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \right)$$

1.2 Inertimomentet

Et inertimoment er en tværskningskonstant og er derfor uafhængig af materialeparametrene. Ligesom det før omtalte elasticitetsmodul siger inertimomentet direkte noget om et materiales stivhed. For symmetriske tværsknit regnes inertimomenterne altid om en vandret- eller lodret akse.

Symmetriske tværsknit



Figur 5

Matematiske definitioner:

Areal af emne:

$$A = \iint dA = \iint dy \cdot dx$$

Statisk moment om x-aksen:

$$S_x = \iint y \cdot dA = \iint y \cdot dy \cdot dx$$

Statisk moment om y-aksen:

$$S_y = \iint x \cdot dA = \iint x \cdot dy \cdot dx$$

Tyngdepunkt:

$$(x, y) = \left(\frac{S_y}{A}, \frac{S_x}{A} \right)$$

Inertimoment om x-aksen:

$$I_x = \iint y^2 \cdot dA = \iint y^2 \cdot dy \cdot dx$$

Inertimoment om y-aksen:

$$I_y = \iint x^2 \cdot dA = \iint x^2 \cdot dy \cdot dx$$

Forsimplede formler for inertimomentet:

Inertimoment om x-aksen:

$$I_x = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3$$

hvor b er parallel med x-aksen

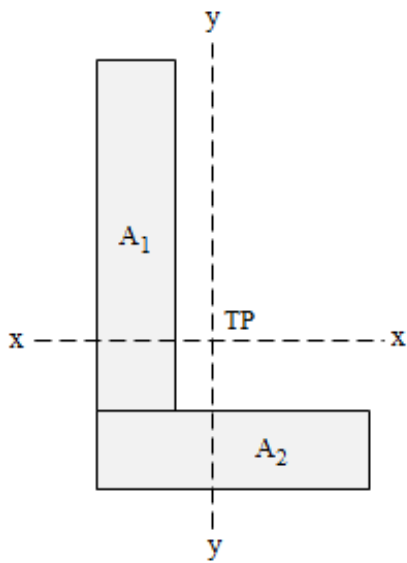
Inertimoment om y-aksen:

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot h \cdot b^3$$

hvor h er parallel med y-aksen

(ovenstående to formler gælder kun for en firkant med hovedakserne placeret i tyngdepunktet)

Asymmetriske tværsnit



Figur 6

Ved asymmetriske tværsnit kan de forsimplede formler stadig anvendes hver for sig på de to delarealer. For at få det samlede inertimoment om henholdsvis x- og y-aksen, er det ikke nok at addere de to inertimomenter, da der yderligere skal tillægges et flytningsbidrag, som tager højde for hver af delarealernes afstand ind til tyngdepunktet.

Flytningsbidraget for areal 1: $I_{flyt.1} = A_1 \cdot d^2$

Flytningsbidraget for areal 2: $I_{flyt.2} = A_2 \cdot d^2$

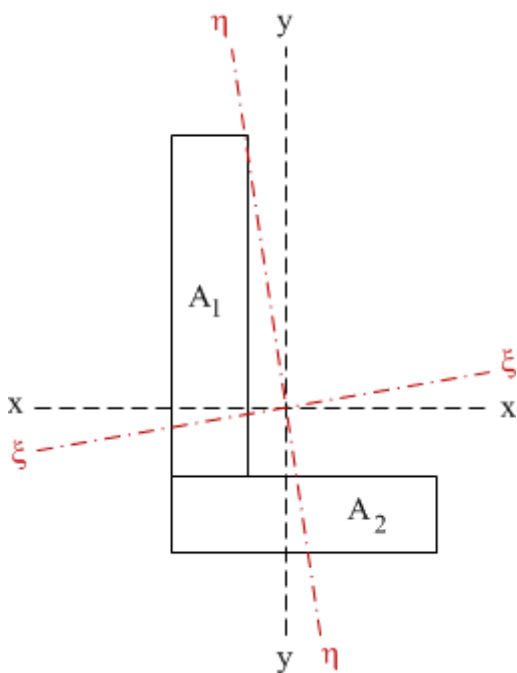
d beskriver henholdsvis den vandrette eller lodrette afstand fra delarealet tyngdepunkt til det samlede tyngdepunkt, alt efter om det er inertimomentet om x eller y man søger.

Det samlede inertimoment om x: $I_x = (I_{x.1} + I_{flyt.x.1}) + (I_{x.2} + I_{flyt.x.2})$

Det samlede inertimoment om y: $I_y = (I_{y.1} + I_{flyt.y.1}) + (I_{y.2} + I_{flyt.y.2})$

Hovedinertimomenter:

Et tværsnit vil altid have to hovedinertimomenter, der beskriver henholdsvis det mindste og det største inertimoment. Disse to inertimomenter er i fysikkens verden meget interessante, da en givet udbøjning altid vil ske om tværsnittets svage akse (den akse som giver det mindste inertimoment). For et symmetrisk tværsnit, som figur 5, vil hovedakserne altid være x og y. Men for et asymmetrisk tværsnit som figur 6, vil der findes to andre akser, som vil give det mindste og største inertimoment. På figur 7 er disse to akser vist som henholdsvis η og ξ .



Figur 7

For at finde hovedinertimomenterne om disse to akser, er det nødvendigt at finde centrifugalmomentet først.

Matematisk definition:

Centrifugalmomentet:
$$I_{xy} = I_{yx} = \iint y \cdot x \cdot dA = \iint y \cdot x \cdot dy \cdot dx$$

Forsimplet formel:

Centrifugalmomentet:
$$I_{xy} = (A_1 \cdot d_{1,x} \cdot d_{1,y}) + (A_2 \cdot d_{2,x} \cdot d_{2,y})$$

A beskriver delarealerne, og d beskriver henholdsvis den vandrette eller lodrette afstand fra delarealet tyngdepunkt til det samlede tyngdepunkt.

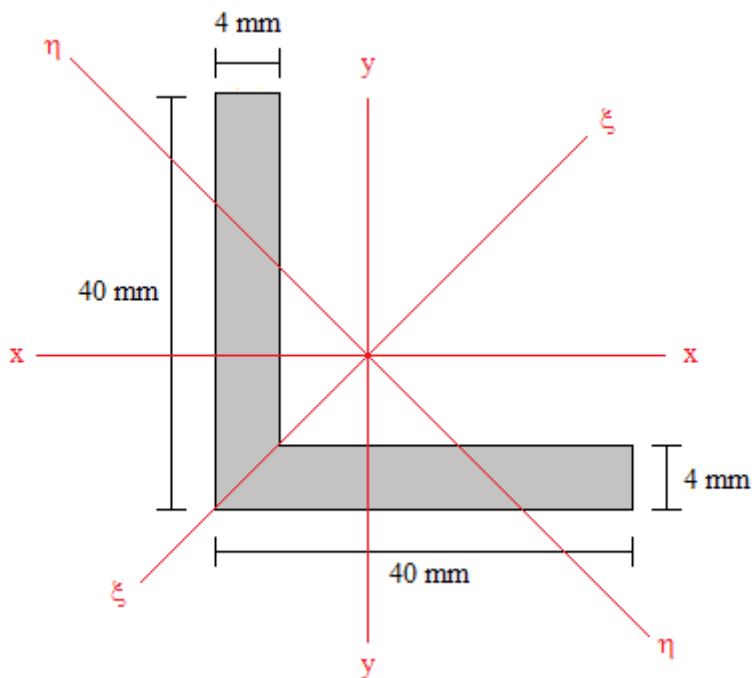
Hovedinertimomenterne kan nu findes ud fra følgende formler:

Det samlede inertimoment om ξ:
$$I_{\xi} = \frac{1}{2} \cdot \left[I_x + I_y + \sqrt{(I_x - I_y)^2 + (2 \cdot I_{xy})^2} \right]$$

Det samlede inertimoment om η:
$$I_{\eta} = \frac{1}{2} \cdot \left[I_x + I_y - \sqrt{(I_x - I_y)^2 + (2 \cdot I_{xy})^2} \right]$$

Opgave 2

Bestem hovedinertimomenterne I_ξ og I_η for følgende tværsnit:



Figur 8

Løsning:

$$I_x = 0,0461 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = 0,0461 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = 0,0273 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_\eta = 0,0188 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_\xi = 0,0734 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

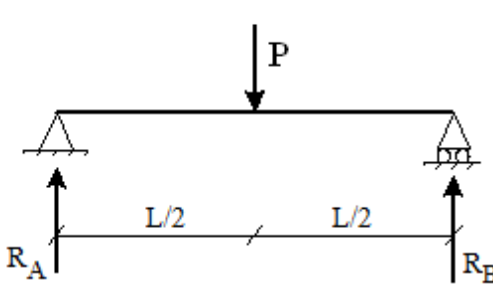
2 Formelsamling for typiske systemer

Da man jo sjældent er den første til at regne på et givet bjælkesystem, findes der op til flere generelle tilfælde, hvor nedbøjningen allerede er udledt for os (vha. bjælkens differentiale ligning). Nedenfor er givet fire meget typisk forekommende statiske systemer.

Symboler:

- P = Den påvirkende kraft [N]
- M = Indspændingsmoment [Nm]
- R = Reaktion [N]
- E = Elasticitetsmodul [MPa] / [N/mm²]
- I = inertimomentet [mm⁴]

Simpel understøttet bjælke med en enkeltkraft på midten:



$$R_A = R_B = \frac{1}{2}P$$

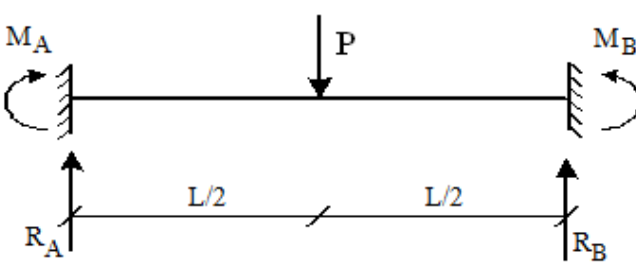
$$M(x) = \frac{1}{2} \cdot P \cdot x \quad \text{for } x \leq \frac{1}{2}L$$

$$M(x) = \frac{1}{2} \cdot P \cdot (L - x) \quad \text{for } x \geq \frac{1}{2}L$$

$$u(x) = \frac{1}{16} \cdot \frac{P \cdot L^3}{E \cdot I} \cdot \left[\frac{x}{L} - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right] \quad \text{for } x \leq \frac{1}{2}L$$

$$u(x) = \frac{1}{12} \cdot \frac{P \cdot L^2 \cdot (L - x)}{E \cdot I} \cdot \left[\frac{2 \cdot x}{L} - \frac{1}{4} - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] \quad \text{for } x \geq \frac{1}{2}L$$

Fast indspændt bjælke med en enkeltkraft på midten:



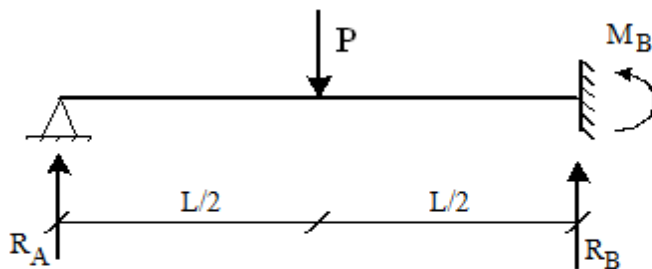
$$R_A = R_B = \frac{1}{2}P$$

$$M_A = M_B = -\frac{1}{8} \cdot P \cdot L$$

$$M(x) = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \left(x - \frac{1}{4} \cdot L \right) \quad \text{for } x \leq \frac{1}{2}L$$

$$u(x) = \frac{1}{16} \cdot \frac{P \cdot L^3}{E \cdot I} \cdot \left[\left(\frac{x}{L} \right)^2 - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right] \quad \text{for } x \leq \frac{1}{2}L$$

Simpel understøttet / fast indspændt bjælke med en enkeltkraft på midten:



$$R_A = \frac{5}{16}P$$

$$R_B = \frac{11}{16}P$$

$$M_B = -\frac{3}{16} \cdot P \cdot L$$

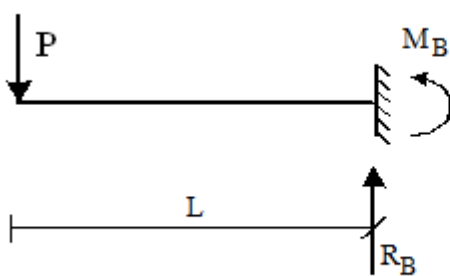
$$M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5}{32}P \cdot L$$

$$u\left(\frac{L}{2}\right) = 0.0091 \cdot \frac{P \cdot L^3}{E \cdot I}$$

$$u_{\text{maks}} = 0.0093 \cdot \frac{P \cdot L^3}{E \cdot I}$$

for $x = 0.447L$

Indspændt udkraget(frit udhængende) bjælke med en enkeltkraft:



$$R_B = P$$

$$M_B = -P \cdot L$$

$$M(x) = -P \cdot x$$

$$u(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{P \cdot L^3}{E \cdot I} \cdot \left[\frac{2}{3} - \frac{x}{L} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right]$$